Logique et raisonnements mathématiques pour l'enseignement au Collège et au Lycée

Denise GRENIER
Institut Fourier – Université Grenoble Alpes
IREM de Grenoble
Groupe Logique de la CII-Lycée

Programmes de collège et lycée et quelques manuels
Éléments de logique pour un « Savoir de Référence »

Atelier. Problèmes pour apprendre la logique et le raisonnement
Situations de Recherche pour la Classe (SiRC)

Dans les programmes du Cycle 4 (B.O. spécial Novembre 2015)

« Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques »

« Les pratiques d'investigation (essai-erreur, conjecture-validation, etc.) sont essentielles et peuvent s'appuyer sur des manipulations ou des recherches papier-crayon » *(→ atelier)*

Six rubriques : Chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer

§ Raisonner :
- utilisation d'un raisonnement logique
- maîtrise de l'argumentation

§ Communiquer :
- distinguer les spécificités du langage mathématique par rapport à la langue française

Comment questionner l'implication mathématique par rapport au “si … alors .. “ de la logique naturelle ?

La « tâche de Wason »

On présente quatre cartes sur lesquelles sont écrits respectivement A, B, 4 et 7. On sait que sur chaque carte, il y a une lettre sur une des faces et un nombre sur l'autre face. On ne peut pas voir l'autre face.

A	B	4	7

Quelle(s) carte(s) est-il suffisant de retourner pour déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Si une carte a une voyelle écrite sur une face, alors il y a un nombre pair écrit sur l'autre face » ?

De la logique « naturelle » à la logique mathématique

Que peut-on faire en classe de mathématiques avec ce type de phrase? (exemples expérimentés)

Ex1. Un père dit à son enfant: « Si tu manges ta soupe, [alors] tu auras un dessert ».

Quel sens le père veut-il donner à cette phrase ?
Quel sens l'enfant donne t-il à cette phrase ?
Que se passe-t-il si l'enfant ne mange pas sa soupe ?

Interprétation large du « si … alors »
Confusions avec la réciproque, ou avec l'équivalence
Causalité et temporalité interviennent dans l'interprétation

Ex2. Arthur parle de Zoé : « Elle roule en vélo ou elle marche à pied »

Le « ou » est-il ici exclusif ou inclusif ?

Questions

En mathématiques, la logique « naturelle » peut-elle permettre de :

- Comprendre une hypothèse, une proposition
- Écrire,valider / invalider une conjecture
- Communiquer, maîtriser une argumentation, justifier un résultat

Quelles notions et règles de logique sont-elles nécessaires ?

De quel langage mathématique a-t-on besoin ?

Logique, raisonnements, preuve dans les programmes de lycée

Au programme

Notations et vocabulaire mathématiques, *langage des ensembles*

Différents types de raisonnements : CN, CS, disjonction des cas, *réciproque, contraposée, contre-exemple, absurde*

Des notions de logique *: ET, OU, proposition conditionnelle, négation (NON), quantificateurs*

Une consigne forte : ne pas faire d'exposé sur la logique, la traiter « naturellement » au fil des chapitres.

Des objectifs explicites (page 1 du BO Seconde 2009):

« Distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant »

« Distinguer implication mathématique et causalité »

Organisation présentée dans le document Ressources - 2nde
« Notations et raisonnement mathématiques »

Notions d'ensemble, sous-ensemble, appartenance, inclusion
Explicitation des quantifications
Implications et équivalences

dans le cadre des fonctions

Condition nécessaire, condition suffisante
Appartenance d'un point à une droite

en géométrie

Réunion et intersection
Négation

en statistiques et probabilités

Langage courant et langage mathématique
- Langage courant explicite et implicite
- Implication mathématique

Constats **(travaux de recherche divers)**

Il n'y a pas de « savoir de référence » (écrit, officiel) pour l'enseignement de la logique et du raisonnement mathématiques dans l'enseignement secondaire.

Très peu de manuels scolaires en fournissent un, souvent très partiel, et les quelques éléments donnés ne sont pas très utilisables (mal définis, présentés de manière inutilisable).

Dès le collège, des notions de base de la logique sont utilisées dans les raisonnements, sans les désigner et sans les avoir « définis ».

Au lycée, ils restent contextualisés dans des chapitres.

En licences scientifiques, les bases du raisonnement ne sont pas du tout opérationnelles.

Ce qui ressemble / diffère
entre langage « naturel » et langage mathématique

Toute phrase n'est pas une proposition

OU, ET n'ont pas tout à fait les mêmes significations

Le UN est souvent un « tout » (quantification implicite)

La vérifonctionnalité de l'implication

Les valeurs de vérité d'une implication et de sa réciproque sont « indépendantes »

La négation d'une implication n'est pas une implication

Un contre-exemple n'a de sens que pour nier une proposition quantifiée universellement

Ce qui ressemble / diffère entre langage « naturel » et langage mathématique

Dans une proposition conditionnelle (Si … alors… , $A \Rightarrow B$)

B est une condition nécessaire pour A

A est vraie seulement si B est vraie

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{NON } B \Rightarrow \text{NON } A) \Leftrightarrow (\text{NON } A \text{ OU } B)$

$A \Rightarrow B$ est vraie lorsque A est fausse *(nécessaire pour comprendre le raisonnement par l'absurde)*

Dans le principe de récurrence (induction en anglais)

l'hérédité peut être vraie à partir d'une valeur *m* et fausse pour cette valeur *m* (et éventuellement quelques valeurs suivantes, voire toutes)

(non visible dans l'image des dominos)

Que serait un « savoir de référence » pour l'enseignement de la logique au Secondaire ?

Les notions de *proposition*, *variable*

Les *connecteurs* : ET, OU, NON, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,OU-exclusif

Les deux *quantificateurs* :

- Tout, pour tout, quel que soit
- Il existe … (tel que), on peut trouver … (tel que)

À partir de propositions élémentaires et de variables, les connecteurs et quantificateurs permettent de construire de nouvelles propositions.

Et c'est tout !!

Des notions nécessaires pour raisonner en mathématique

- La négation d'une proposition (conditionnelle) quantifiée
  Un *exemple* suffit à prouver une proposition **existentielle**
  Un *contre-exemple* suffit à prouver qu'une proposition **universelle** est fausse

- L'implication lorsque la prémisse est fausse
  Nécessaire pour comprendre la *preuve par l'absurde et le principe de récurrence*

- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ (**Non** A **OU** B)
  Nécessaire pour comprendre la *négation d'une proposition conditionnelle* : (**Non** $(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow$ (A **ET** **Non** B)

- La vérifonctionnalité de l'implication
  Il n'y a pas de temporalité ni de causalité dans $A \Rightarrow B$.
  La valeur de vérité de $A \Rightarrow B$ ne dépend que de celle des propositions A et B

C'est quoi, une proposition mathématique ?

– Une phrase (avec un verbe) dont on peut décider si elle est vraie ou fausse.

– On peut avoir des propositions « ouvertes » avec des variables, il faut préciser le domaine de ces variables et les quantifications.

– Les phrases du langage courant sont rarement des propositions.

Exercice. Lesquelles de ces phrases sont des propositions ?

2 est pair   13 est pair

259/7 n'est pas un nombre entier

La longueur du côté d'un carré d'aire 8 cm² est égale à $2.\sqrt{2}$ cm

n est pair

Deux surfaces de même aire ont même périmètre (CRPE)

Soit *n* un entier pair

Il fera beau demain

Le connecteur ET

Dans le langage courant

Ponctuation, conjonction de coordination

Coordination différée : « ce soir, je vais au resto et au cinéma »

Causalité : « il a trop mangé et il a eu une indigestion »

Addition : « il y a 25 élèves dans une classe et 22 dans l'autre »

Opposition, rapprochement : « toi et moi »

Synonymes : alors, avec, comme, plus, puis

En mathématique

Pas de temporalité ni de causalité

ET : relie deux propositions A et B. On obtient une nouvelle proposition qui est vraie seulement si A et B sont toutes les deux vraies.

Exemples 2 est pair **ET** 3^2+2 est impair

2 est pair **ET** 8437 est divisible par 11

Le connecteur OU

Dans le langage courant

Conjonction de coordination

Exprime une alternative, une explication, une exclusion (« fromage ou dessert »), une équivalence

Synonymes : ou bien, sinon, soit

Marque un choix souvent exclusif :

« Ce soir, je vais au resto ou au cinéma »

En mathématique

Inclusif

relie deux propositions A et B. On obtient une nouvelle proposition qui est fausse seulement si A et B sont toutes les deux fausses.

Exemple **5** est impair **OU** $2^{32}+1$ est un nombre premier

ET, OU dans un manuel de Seconde

(Declic Seconde, 2010, p.329, Seule demi-page sur ce thème)

Un peu de logique – symbole, vocabulaire

« « et » entre deux propositions, deux événements: les deux propositions doivent être simultanément vraies; les événements réalisés touts deux. »

« ou » entre deux propositions, deux événements: au moins l'un(e) des propositions, des événements (et peut-être les deux) doit être vraie (réalisé). »

Proposition n'est pas définie.

Proposition/événement : ET et OU sont-ils les mêmes ?

De fait, ET et OU ne sont pas définis (dans un seul cas pour ET !) donc inutilisables

Une proposition avec le connecteur ET ne pourrait donc pas être écrite quand elle est fausse?

Est-ce si difficile de bien définir ces notions ?

(d'autres manuels le font mieux ….)

La polysémie du mot UN

UN : n'est pas une notion de logique
mais très présent dans le langage mathématique

Dans le langage courant

L'article indéfini : un, au moins un, un parmi d'autres

Le **chiffre, le nombre**

En mathématique : usage de sens différents

un parmi d'autres : «Choisis **un** nombre »

un au moins : «Il y a **un** chiffre impair dans la liste {8,7,3,6,0}

tout : « **Un** carré a quatre angles droits »

le nombre ou le chiffre «**1**» : « rajoute 1 à 98 »

Polysémies de UN

Exercice
Comment interpréter les « un » dans les phrases suivantes ?
Comment les réécrire pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté ?

Un carré est un rectangle.

Un parallélogramme qui a **un** angle droit est **un** rectangle.

La racine carrée d'**un** entier naturel est **un** entier ou **un** irrationnel.

→ Peut être une bonne introduction aux *quantificateurs*

Quantificateur Tout, Pour tout, quel que soit, $\forall$

devant une proposition dépendant d'une ou plusieurs variables d'un *ensemble* E.

« $\forall x \in E$, $A(x)$ » est vraie si et seulement si elle est vraie pour toutes les valeurs de x dans E.

Exemple

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou faussses ?

Tout rectangle est un parallélogramme

Tous les nombres rationnels ont une écriture décimale illimitée périodique

Quels que soient les nombres réels a et b, $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$

$\rightarrow$ *Permet d'introduire à la notion de contre-exemple*

Quantificateur existentiel : Il existe … tel que, $\exists$

devant une proposition (ouverte) dépendant d'une ou plusieurs variables

« Il existe x, tel que A(x) » est vraie si et seulement si elle est vraie pour **au moins une** valeur de x.

Exemples

Il existe un triangle rectangle isocèle dont le rapport de la longueur de l'hypothénuse sur celle du côté vaut $\sqrt{2}$.

Il existe un nombre positif dont le carré est égal à lui-même.

Il existe des nombres réels a et b, tels que $(a+b)^2=a^2+b^2$.

Négation d'une proposition

Que faut-il savoir pour écrire la négation d'une proposition ?

L'influence du contexte dans la logique du langage courant

Exemple. Écrire les négations des deux phrases suivantes :

P1. « Tous mes copains viennent à mon anniversaire »

P2. « Dans ce sac, t**outes** les billes sont rouges »

Pour P1, ce n'est pas « Aucun de mes copains ne vient à mon anniversaire » ! *Mais cela ne posera aucune difficulté* ...

Pour P2, laquelle de ces trois phrases est la « bonne » ?

Dans ce sac, aucune bille n'est rouge.

Dans ce sac, toutes les billes ne sont pas rouges.

Dans ce sac, **il y a (au moins)** une bille qui n'est **pas** rouge.

Négation d'une proposition « simple »

La négation de A est **non A**

La négation de « $\forall x$; A(x) » est « $\exists x$, non A(x)

notion de contre-exemple

La négation de « $\exists x$; A(x) » est « $\forall x$, non A(x)

Exemple

« Dans la liste {0, 18, 24, 39, 54, 63, 93}, **tous** les nombres sont divisibles par 9 » est une proposition fausse.

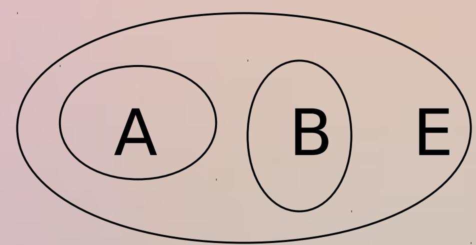
Il existe (au moins) un contre-exemple

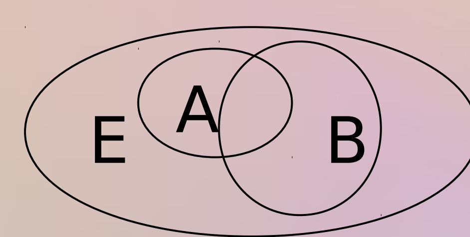
Sa négation est « Dans la liste {0, 4, 6, 7, 8, 16, 798}, **il existe** un nombre qui n'est pas divisible par 9 »

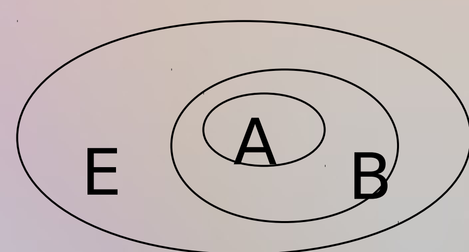
(qui est une proposition vraie)

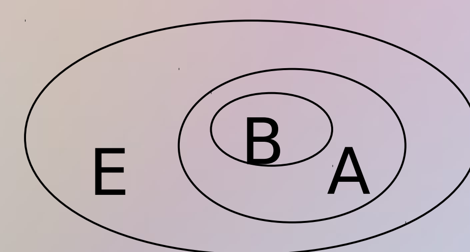
Que faut-il pour « mettre en œuvre une implication correspondant à une inclusion » ?

Soit E un ensemble d'objets, A le sous-ensemble des éléments x de E qui vérifient une propriété A, B le sous-ensemble des éléments x de E qui vérifient une propriété B.
Hachurer le sous-ensemble de tous les éléments x de E pour lesquels $(A(x) \Rightarrow B(x))$ est vraie

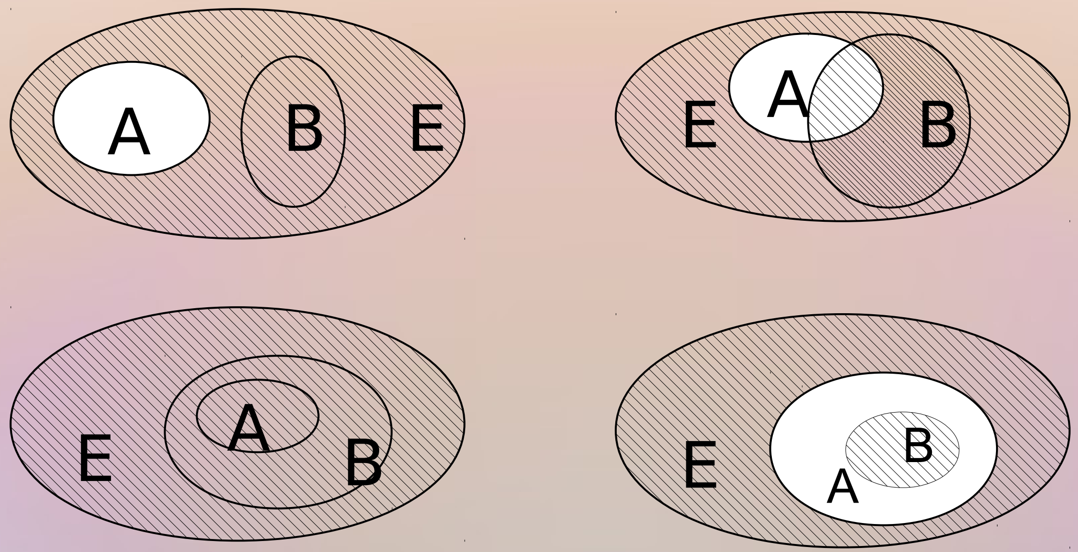








Définition ensembliste de l'implication



Raisonner avec l'implication et des prémisses fausses …

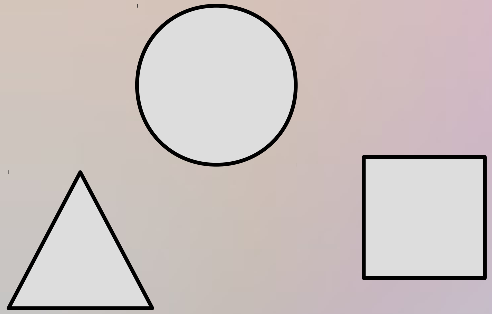
Problème

On dispose de trois jetons de trois formes différentes (Carré, Rond et Triangle) et de trois couleurs différentes (Rouge, Vert et Bleu).

On suppose que les trois affirmations suivantes sont vraies :

A1. Si le jeton rond est bleu, alors le jeton carré est vert.
A2. Si le jeton rond est vert, alors le jeton carré est rouge.
A3. Si le jeton carré n'est pas bleu, alors le jeton triangulaire est vert.

Solution ?



Négation d'une implication

Théorème : NON (A$\Rightarrow$B) $\Leftrightarrow$ A et (NON B)

la négation de « $\forall x$, A(x)$\Rightarrow$B(x) » est «$\exists x$; A(x) et non B(x) »

La négation d'une implication (proposition conditionnelle) n'est pas une implication

dans le cadre ensembliste :

A et B étant deux sous-ensembles d'un ensemble E

la négation de «$\forall x$, $x \in A \Rightarrow x \in B$ » est « $\exists x$, $x \in A$ et $x \in E \setminus B$ »

Preuve par l'absurde (ou *reductio ad absurdum*)

Pour démontrer que $A \Rightarrow B$ est vraie,
on démontre que A ET Non B entraîne une proposition fausse

(A ET Non B) $\Rightarrow$ C, C fausse

C peut être Non A, ou B, ou une proposition fausse

Pour comprendre un preuve par l'absurde, il faut donc savoir que:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\textbf{Non } A \textbf{ OU } B)$$

$$(\textbf{Non } (A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \textbf{ ET Non } B)$$

En pratique, confusions fréquentes avec la preuve par contraposition

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\textbf{Non } B \Rightarrow \text{Non } A)$$

$$\text{« } \forall x,\ A(x) \Rightarrow B(x) \text{ »} \Leftrightarrow \text{« } \forall x, \text{ non } B(x) \Rightarrow \text{non } A(x) \text{ »}$$

Récurrence

Axiome (de $\mathbb{N}$)

Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

Principe de récurrence

Si [($\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, P($n_0$) vraie) ET ($\forall n \geq n_0$, P(n) $\Rightarrow$ P(n+1)vraie)],

ALORS [$\forall n \geq n_0$, P(n) vraie].

Principe dit « de Fermat »

Tout ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Équivalent à

Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans $\mathbb{N}$.

Trois registres pour l'implication

« Logique naturelle » / « logique commune »

Logique mathématique

Logique « formelle »

Proposition, connecteurs,
calcul des prédicats
tiers exclu,
vérifonctionnalité

Logique « ensembliste »

$A \subseteq B \Rightarrow (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$

OU, ET, Non A / $\cup$ $\cap$ $\overline{A}$

Raisonnement déductif

modus ponens, modus tollens
négation, absurde, récurrence
conditions nécessaire / suffisante

Le connecteur IMPLIQUE

En pratique rencontré essentiellement dans le raisonnement déductif

propositions	*calcul des prédicats*

Règle du *modus ponens*

propositions	*calcul des prédicats*
A $\Rightarrow$ B vraie	$\forall x$, A(x) $\Rightarrow$ B(x) est vraie
Or A est vraie	Or A(a) est vraie
Donc B est vraie	Donc B(a) est vraie

Règle du m*odus tollens*

propositions	*calcul des prédicats*
A $\Rightarrow$B est vraie	$\forall x$, A(x) $\Rightarrow$ B(x) est vraie
Or Non B est vraie	Or Non B(a) est vraie
Donc Non A est vraie	Donc Non A(a) est vraie

Logique des propositions – « table de vérité »

La logique naturelle permet de construire, ou de se convaincre, pour trois des quatre lignes.

A	B	A=> B
V	V	V
V	F	F
F	V	V ou F ?
F	F	V

Pour la 3ème ligne, aucun raisonnement «naturel» ne convient.
Et la contraposée conduit à la même situation : prémisse fausse, conséquent vrai.
Deux choix possibles a priori : Vrai ou Faux.
Le choix « Faux » ne permettrait pas de distinguer l'implication stricte de l'équivalence.

Conventions de la logique des propositions

Principe de bivalence

Une proposition a deux valeurs de vérité possibles : Vrai ou Faux

Principe du tiers exclu

Une proposition est soit vraie soit fausse.

Principe de non-contradiction

Une proposition est vraie ou fausse, jamais les deux en même temps.

Vérifonctionnalité

La valeur de vérité d’une phrase ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu et de la définition des connecteurs qui les relient.

Un énoncé est ***contingent*** pour un sujet s'il n'a pas les moyens de savoir si cet énoncé est vrai ou faux.

Ouvrage

Groupe « Logique et raisonnement » (2016) *Situations de recherche pour la classe pour l'apprentissage du raisonnement mathématique.* IREM de Grenoble.

Articles et thèses

DELOUSTAL V., GRENIER D. (2001) L'implication dans le raisonnement mathématique : État des lieux dans l'enseignement en France et conceptions d'étudiants, *Learning in mathematics and Science and Educational Technology,* A. Gagatsis editeur, Intercollege press Cyprus, 2001.

DELOUSTAL-JORRAND V. (2004) *Étude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique,* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

FABERT Ch. & GRENIER D. (2011), Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique, *petit x* n°87 31-52.

GARDES D., GARDES M.-L., GRENIER D. (2016) État des connaissances des élèves de terminale S sur la raisonnement par récurrence, *petit x* n°100. IREM de Grenoble

GIROUD N. (2011) *Rôle de la démarche expérimentale dans les Situations de recherche pour la classe.* Thèse de l'université Joseph Fourier.

GODOT K. (2005) Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Thèse de l'université Joseph Fourier.

GRENIER D. (2012) Une étude didactique du concept de récurrence, *petit x* n°88 27-47.

GRENIER D. (2009) Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes, *Actes du séminaire de l'ARDM*, Paris.

GRENIER D. (2008) Expérimentation et preuve en mathématiques, in *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*, collection « Science, histoire et société », direction Laurence Viennot, PUF.

GRENIER D. TANGUAY D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratiques et théoriques des polyèdres réguliers, *petit x* n°78, 26-52. IREM de Grenoble.

GRENIER D. & PAYAN Ch. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, cahiers du séminaire national de recherche en didactique de mathématiques, Paris, 19 Octobre 2002.

Situations de recherche pour la classe (SiRC)

Équipe fédérative MATHS-À-MODELER
Et groupe « logique et SiRC » IREM de Grenoble

Quelques exemples qui ont fait leur preuve à tous les niveaux scolaires
Pour la démarche de recherche et l'apprentissage des différents types de raisonnement mathématique

Les programmes mathématiques scolaires à tous les niveaux insistent sur l'importance de l'*expérimentation,* la *découverte* et la *qualité* de l'activité scientifique en classe

Qu'est-ce que cela veut dire ?
Peut-on croire que l'élève va jouer au chercheur ... naturellement ?
Et quelles connaissances peut-on construire ainsi ?

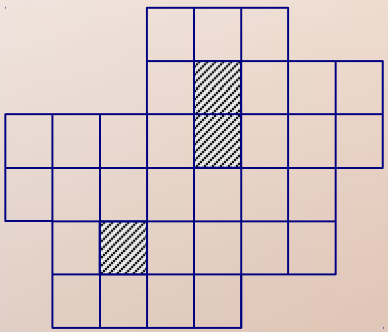
Dans les manuels scolaires et les pratiques de classe
La démarche expérimentale est très réduite, en temps et en contenus
Les problèmes de “recherche” sont peu présents. L'expérimental est très (trop) souvent pratiqué avec l'utilisation de l'ordinateur.

Réserves ou craintes exprimées par les enseignants

les contraintes institutionnelles
l'absence de formation à la gestion de ces situations

SiRC . Pavages de polyminos (une situation fondamentale ?)

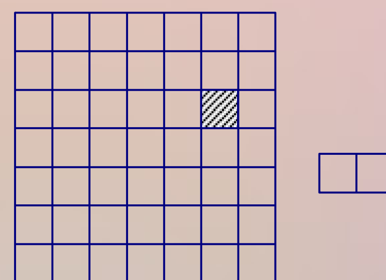
La question générale *Q0.* *Etant donné un polymino, est-il pavable par un ensemble de polyminos identiques plus petits ?*



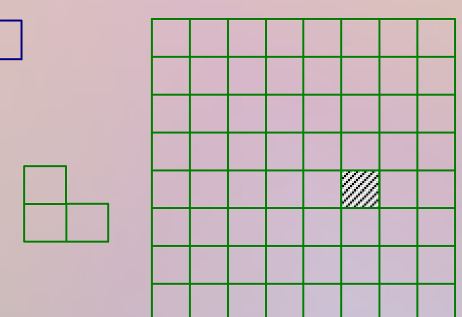
Par exemple, le polymino ci-contre est-il pavable par des dominos ? Q0 est un problème ouvert

Trois sous-problèmes

P1. Rectangle avec un trou quelconque / dominos



P2. Carré avec un trou quelconque / triminos en L



P3. Trapèze sans trou / dominos

Chasse à la bête

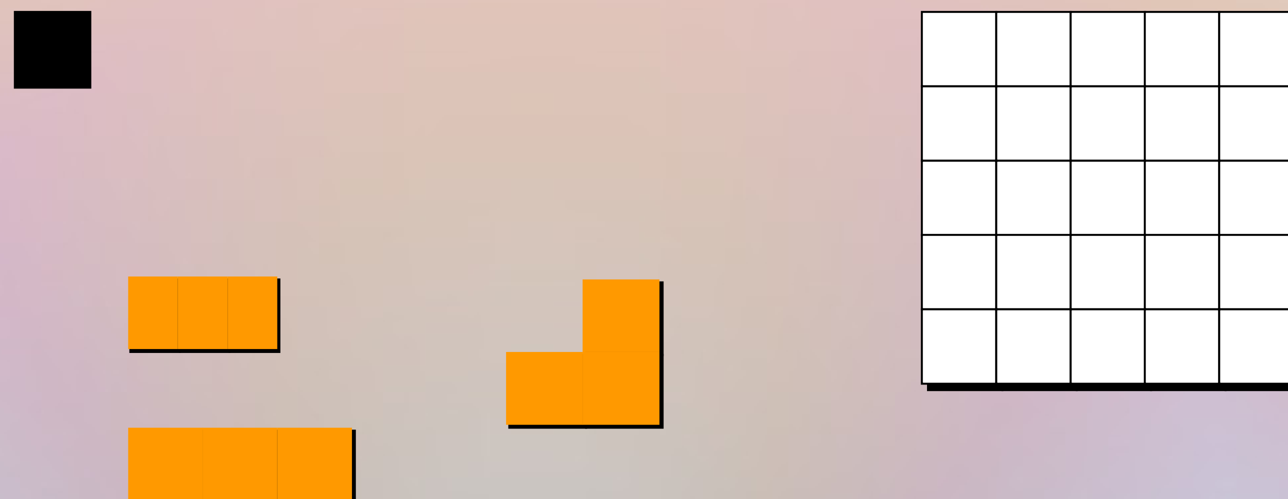
On veut protéger un champ quadrillé (ici, un polymino carré 5x5) d'un nuage de bêtes.

On dispose pour cela de pièges (uniminos) que l'on va placer dans le champ de manière à ce qu'aucune bête ne puisse se poser sans toucher un piège.

Une bête est un des trois petits polyminos (domino, trimino long, trimino en L).

Piège

Bêtes



Il s'agit, pour chacun des 3 types de bêtes de trouver le plus petit nombre de pièges (et leurs dispositions) qui assure la protection du champ

Un problème de logique

Les quatre phrases ci-dessous doivent former un système logique « cohérent ». Combien y-a-t-il de phrases vraies ?
Y-a-t-il plusieurs solutions ?

A1. Aucune de ces phrases n'est vraie
A2. Une seule de ces phrases est fausse
A3. Deux exactement de ces phrases sont vraies
A4. Une au moins de ces phrases est vraie

Notions en jeu
Principe du tiers exclu, principe de non contradiction
Raisonnement par l'absurde